**第10讲 正比例函数和反比例函数**

**知识梳理**

**正、反比例函数的解析式、定义域、图像、性质**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **函数** | **正比例函数** | **反比例函数** |
| 解析式 | *y*=*kx*(*k*≠0) | *y*=(*k*≠0) |
| 定义域 |  |  |
| 图像 | ***O***        ***O***    经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_与\_\_\_\_\_\_\_\_\_两点的直线 | ***O***        ***O***    经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_与\_\_\_\_\_\_\_\_\_两点的双曲线 |
| 经过  象限 | 当*k*>0时，图像经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限；  当*k*<0时，图像经过\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限. | 当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，图像经过一、三象限；  当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，图像经过二、四象限. |
| 增减性 | 当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随着*x*的增大而增大；  当\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，*y*随着*x*的增大而减小. | 当*k*>0时，在每个象限内，*y*随着*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_；  当*k*<0时，在每个象限内，*y*随着*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_. |

**典型解析**

**一、变量与函数**

**例1：**下列各式中，能表示*y*是*x*的函数的有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个．

①3*x*-2*y*=0； ②*y*=； ③ ④*x*=|*y*|； ⑤*y*=*x*； ⑥*y*=|*x*|．

规范解答

对于①②⑤⑥，当*x*确定时，*y*随之唯一确定，所以①②⑤⑥能表示*y*是*x*的函数；对于③④，对于每一个确定的*x*的值，*y*并非都有唯一确定的值与其对应，不满足函数的概念，所以③④中的*y*不是*x*的函数，本题的答案为4个．

解后反思

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量*x*与*y*，并且对于*x*的每一个确定的值，*y*都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说*x*是自变量，*y*是*x*的函数．初步理解函数的概念：(1)两个变量相互联系，一个变量发生变化时另一个变量也随之变化；(2)函数与自变量之间是单值对应关系，自变量的值确定后，函数值是唯一确定的．认识函数概念，关键是认识到变量之间的单值对应关系．当自变量取定一个值时，单值对应包含两重含义：(1)另一个量有对应值；(2)对应值只有一个．

**例2：**求下列函数的定义域：

(1) (2)

(3) (4)

(5).

答案：(1)*x*≥1且*x*≠5；(2)*x*≤-3或*x*≥3且*x*≠5；(3)*x*≠0且*x*≠-1且*x*≠；(4)*x*≥-1且*x*≠2；(5)*x*≥-3且*x*≠-1且*x*≠1

**二、正比例函数和反比例函数的定义**

**例3：**①如果是正比例函数，那么*n*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

②若是反比例函数，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(1)2；(2)3

**【变式训练】**

1．简答：若*x*、*y*是变量，

(1)已知*y*=-(*a*+2)*x*是正比例函数，求*a*的值；

(2)已知是正比例函数，求*m*的值；

(3)已知正比例函数*f*(*x*)满足*f*(2)=，求此函数解析式及*f*(-1.5)的值；

(4)已知正比例函数*y*=(2-3*m*)*x*，如果自变量*x*的值增加3时，函数*y*的值增加6，求这个函数的解析式；

(5)若函数*y*=(12-3*m*2)*x*2+(2-*m*)*x*是正比例函数，求*m*的值．

答案：(1)*a*≠-2；(2)*m*=-18(4)*y*=2*x*；(5)*m*=-2

2．简答：若*x*、*y*是变量．

(1)已知是反比例函数，求*a*的取值范围；

(2)已知是反比例函数，求*m*的值；

(3)已知反比例函数*f*(*x*)满足*f*()=求此函数解析式及*f*(5)的值；

(4)若函数*y*=(2*m*+6)*x*-1是反比例函数，求*m*的取值范围．

答案：(1)*a*≠3且*a*≠1；(2)*m*=2；(3)；(4)*m*≠-3

**三、确定函数解析式**

**条件：**已知两个变量的一对对应值，确定函数解析式；

**类型：①文字语言：**当*x*=××，*y*=××；

**②文字语言：**已知函数图像经过一点*A*(×，×)；

**③图形语言：**已知函数图像，及图像上的明确点*A*(×，×)；

**④表格语言：**已知反映两个变量关系的表格．

**例4：**①已知*y*与*x*成反比例，并且当*x*＝2时，*y*＝-1；那么当*y*＝时，*x*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-4

②正比例函数的图像过点(6，2)，那么函数解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

③已知反比例函数与正比例函数*y*=2*x*的图像都经过点*A*(*a*，-2)，则此反比例函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

④如图所示，反比例函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*a*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

⑤在平面直角坐标系内，从反比例函数(*k*＜0)的图像上的一点分别作*x*、*y*轴的垂线段，与*x*、*y*轴所围成的矩形面积是9，那么这个函数解析式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

⑥某厂从2001年起开始投入技术改进资金，经技术改进后，其产品的生产成本不断降低，具体数据如下表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 年度 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
| 投入技改资金*x*(万元) | 2.5 | 3 | 4 | 4.5 |
| 产品成本*y*(万元／件) | 7.2 | 6 | 4.5 | 4 |

(1)请认真分析表中数据，哪种函数能表示其变化规律，为什么？求出函数的解析式；

(2)按照这种变化规律，若2005年已投入技改资金5万元．

①预计生产成本每件比2004年降低多少万元？

②如果打算在2005年把每件产品成本降低到3.2万元，则还需投入技改资金多少万元(结果精确到0.01万元)？

答案：(1)反比例函数；；(2)①0.4万元；②5.63万元.

**四、根据图像的位置或函数增减性，确定比例系数中的字母的值或取值范围**

**例5：**(1)若正比例函数*y*=(3-2*m*)*x*的图像经过第二、四象限，则*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

(2)若反比例函数的图像经过二、四象限，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：0

(3)已知函数*y*=，当*x*<0时，*y*随*x*的增大而减小，那么*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

(4)若反比例函数在每一个象限内，*y*随*x*的增大而增大，则*m*＝\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-2

(5)在同一直角坐标平面内，如果直线*y*=*k*1*x*与双曲线*y*=没有交点，那么*k*1和*k*2的*x*关系一定是( )．

(A)*k*1<0，*k*2>0 (B)*k*1>0，*k*2<0 (C)*k*1、*k*2同号 (D)*k*1、*k*2异号

答案：D

(6)已知*A*(-1，*y*1)，*B*(2，*y*2)两点在双曲线上，且*y*1>*y*2，则*m*的取值范围是( )．

A．*m*>0 B．*m*<0 C． D．

答案：D[提示]因为点*A*(-1，*y*1)的横坐标小于0，点*B*(2，*y*2)的横坐标大于0，且*y*1>*y*2，所以点*A*、*B*分别在第二、四象限，所以3+2*m*<0，解得

(7)若直线经过原点，且*y*的值随*x*的增大而减小，则*k\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*．

答案：*k*=0

**五、根据函数增减性确定图像位置，反过来，根据图像位置确定函数增减性**

**例6：**(1)正比例函数*y*=*kx*(*k*≠0)当图像在第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限时，*y*随*x*的增大而增大．

答案：一、三

(2)反比例函数(*k*≠0)当随*x*的减小而增大时，图像在第\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限．

答案：一、三

(3)反比例函数的图像在\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_象限，在每个象限内，*y*随*x*的增大而\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：一、三；减小

(4)在反比例函数图像上有三点(*x*1，*y*1)，(*x*2，*y*2)，(*x*3，*y*3)，若*x*1>*x*2>0>*x*3，则下列各式正确的是( )．

(A)*y*3>*y*1>*y*2 (B)*y*3>*y*2>*y*1 (C)*y*1>*y*2>*y*3 (D)*y*1>*y*3>*y*2

答案：A

(5)若点(-2，*y*1)，(-1，*y*2)，(1，*y*3)都在反比例函数图像上，则下列关系正确的是( )．

(A)*y*1>*y*2>*y*3 (B)*y*2>*y*1>*y*3 (C)*y*3>*y*1>*y*2 (D)*y*3>*y*2>*y*1

答案：C

**六、正、反比例函数的综合应用**

**例7：**(1)在同一直角坐标平面内，如果直线*y*=*k*1*x*与双曲线*y*=有两个交点，那么*k*1和*k*2的关系一定是( )．

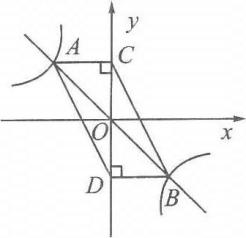
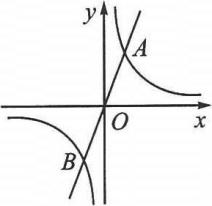
(A)*k*1<0，*k*2>0 (B)*k*1>0，*k*2<0 (C)*k*1、*k*2同号 (D)*k*1、*k*2异号

答案：C

(2)如图，函数*y*=-*x*与函数的图像相交于*A*，*B*两点，过*A*，*B*两点分别作*y*轴的垂线，垂足分别为点*C*，*D*，则四边形*ACBD*的面积为( )．

A．2 B．4 C．6 D．8

答案：D[提示]∵过函数的图像上*A*，*B*两点分别作*y*轴的垂线，垂足分别为点*C*，*D*，∴*S*△*AOC*=*S*△*ODB*=又∵*OC*=*OD*，*AC*=*BD*，∴*S*△*AOC*=*S*△*ODA*=*S*△*ODB*=*S*△*OBC*=2，∴四边形*ABCD*的面积为*S*△*AOC*+*S*△*ODA*+*S*△*ODB*+*S*△*OBC*=4×2=8．

第(2)题图 第(3)题图

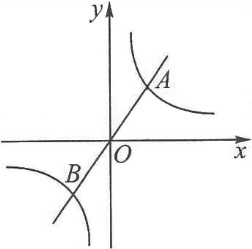
(3)如图，直线*y*=*kx*(*k*>0)与双曲线交于*A*、*B*两点，若*A*、*B*两点的坐标分别为*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则*x*1*y*2+*x*2*y*1的值为( )．

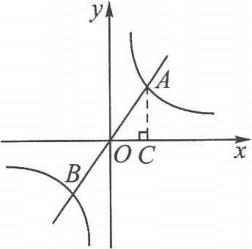
A．-8 B．4 C．-4 D．0

答案：C[提示]依题意知*A*、*B*关于原点对称，*y*2=-*y*1，*x*2=-*x*1，∴*x*1*y*2+*x*2*y*1=-2*x*1*y*1=-4．

**例8：**如图，直线*y*=*mx*与双曲线*y*=相交于*A*、*B*两点，*A*点的坐标为(1，2)．

(1)求反比例函数的解析式；(2)根据图像直接写出当时，*x*的取值范围；

(3)计算线段*AB*的长．

[解析](1)将*A*(1，2)代入即可求得反比例函数解析式．(2)由直线*y*=*mx*与双曲线的特点可知点*A*、*B*关于原点*O*对称．从而可知*B*(-1，-2)，进而可求出*x*的取值范围．(3)由点*A*的坐标求出线段*OA*的长，利用*AB*=2*OA*可求线段*AB*的长，或利用点*A*、*B*的坐标直接求出线段*AB*的长．

[解](1)把*A*(1，2)代入中，得*k*=2．∴反比例函数的解析式为．

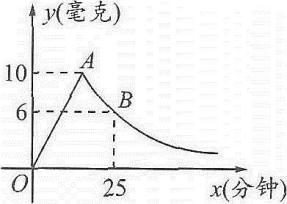
(2)-1<*x*<0或*x*>1．

(3)过点*A*作*AC*⊥*x*轴，垂足为点*C*．

∵*A*(1，2)，∴*AC*=2，*OC*=1．

由双曲线的对称性得*AB*=2*OA*=2．

**例9：**据媒体报道，近期“手足口病”可能进入发病高峰期，某校根据《学校卫生工作条例》，为预防“手足口病”，对教室进行“熏药消毒”．已知药物在燃烧释放过程中，室内空气中每立方米含药量*y*(毫克)与燃烧时间*x*(分钟)之间的关系如图所示(即图中线段*OA*和双曲线在*A*点及其右侧的部分)，根据图像所示信息，解答下列问题：

(1)写出从药物释放开始，*y*与*x*之间的函数关系式及自变量的取值范围；

(2)据测定，当空气中每立方米的含药量低于2毫克时，对人体无毒害作用，那么从消毒开始，至少在多长时间内，师生不能进入教室？

[解析](1)分两段求，先求反比例函数解析式，再求正比例函数解析式；(2)直接算出在反比例函数中当*y*=2时*x*的值即可．

[解](1)设反比例函数解析式为

将(25，6)代入解析式得，*k*=25×6=150．

则函数解析式为

将*y*=10代入解析式得

故*A*(15，10)，

设正比例函数解析式为*y*=*nx*，

将*A*(15，10)代入得

则正比例函数解析式为

∴75-3=72(分钟)．

答：从药物释放开始，师生至少在72分钟内不能进入教室．

[方法归纳]本题是一次函数和反比例函数所构成的分段函数，并进一步利用反比例函数解决实际问题，解决这类问题的关键是审清题目，理清步骤：先根据点的坐标确定解析式，再根据方程或不等式解决实际问题．

**同步训练**

**一、填空题**

1．函数中，自变量*x*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[解析]由得*x*≤2且*x*≠-1．

[答案]*x*≤2且*x*≠-1

2．已知*f*(*x*)=3*x*2-2*x*-1，若*f*(*x*)=0，则*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：或1

3.已知直角三角形的斜边长为20，则一条直角边*y*关于另一条直角边*x*的函数关系式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

4．已知函数*y*=(3*k*-6)*x*，如果*y*随*x*增大而减小，那么*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*k*<2

5．函数的图像是双曲线，且图像在二、四象限，则=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

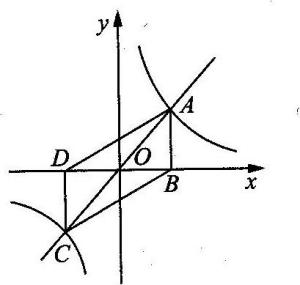
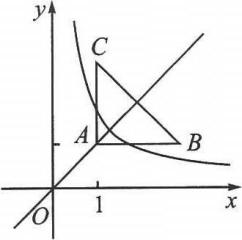
答案：-1

6．设有反比例函数为其图像上的两点，若*x*1<0<*x*2时，*y*1>*y*2，则*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：*k*<-1

7．正比例函数*y*=*x*与反比例函数的图像相交于*A*，*C*两点，*AB*⊥*x*轴于*B*，*CD*⊥*x*轴于*D*，如图所示，则四边形*ABCD*的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：2

第7题图 第8题图

8．如图所示，等腰直角三角形*ABC*位于第一象限，*AB*=*AC*=2，直角顶点*A*在直线*y*=*x*上，其中*A*点的横坐标为1，且两条直角边*AB*、*AC*分别平行于*x*轴、*y*轴，若双曲线与△*ABC*有交点，则*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：1≤*k*≤4[提示]当双曲线经过点*A*时，*k*=|*x*|=1，当双曲线经过*BC*边中点时，易求出*BC*中点为(2，2)，所以*k*=2×2=4，因而1≤*k*≤4．

**二、选择题**

9．如图，在同一坐标系内，已知函数*y*=*k*1*x*与函数*y*=*k*2*x*，满足*k*1<0<*k*2，则*y*=*k*1*x*与*y*=*k*2*x*的图像大致为( )．

Image2

答案：B

10．对于反比例函数下列说法不正确的是( )．

(A)它的图像分布在第一、三象限 (B)点(*k*，*k*)在它的图像上

(C)它的图像是中心对称图形 (D)*y*随*x*的增大而增大

答案：D

**三、解答题**

11．(1)若正比例函数*y*=*mx*(*m*≠0)和反比例函数*y*=(*n*≠0)的图像有一个交点为点(2，3)，①求*m*与*n*的值；②求另一个交点的坐标；

(2)已知反比例函数*y*=(*k*≠0)与正比例函数*y*=*x*的图像有交点，求*k*的取值范围．

答案：(1)①*m*=，*n*=6；②(-2，-3)；(2)*k*>0

12．已知：如图，点*P*是一个反比例函数与正比例函数*y*=-2*x*的图像的交点，*PQ*垂直于*x*轴，垂足*Q*的坐标为(2，0)．

(1)求这个反比例函数的解析式．

(2)如果点*M*在这个反比例函数的图像上，且△*MPQ*的面积为6，求点*M*的坐标．

*O*

*Q*

*x*

*P*

*y*

答案：(1)*y*=；(2)(5，-)或(-1，8)

**【探索创新】**

如图，等边三角形*ABC*中，*AB*=4，点*P*是*AB*上的一个动点(点*P*可以与点*A*重合，但不与点*B*重合)，过点*P*作*PE*⊥*BC*，垂足为*E*，过点*E*作*EF*⊥*AC*，垂足为*F*，过点*F*作*FQ*⊥*AB*，垂足为*Q*，设*BP*=*x*，*AQ*=*y*．

(1)写出*y*与*x*之间的函数关系式及自变量的取值范围；

(2)当*BP*的长等于多少时，点*P*与点*Q*重合；

(3)用*x*的代数式表示*PQ*的长(不必写出解题过程)．

